

# Ein Feldverfahren zur Überprüfung von Nivelliergeräten unter strenger Berücksichtigung der Vertikalrefraktion

Frank Neitzel  
Svetozar Petrovic

Da die Bestimmung der Restneigung eines Nivelliergerätes im Feldverfahren durch die Ablenkung der Zielstrahlen infolge der Vertikalrefraktion beeinflusst wird, soll eine neue Minimalkonfiguration mit 3 Lattenstandpunkten und 2 Instrumentenstandpunkten entwickelt werden, mit der eine Berücksichtigung der tatsächlich zum Meßzeitpunkt herrschenden Refraktion möglich ist.

## 1 Einführung

Bei der Überprüfung der Hauptforderung an ein Nivelliergerät, daß

- die Zielachse beim Libellennivellier bei eingespielter Röhrenlibelle horizontal verläuft, bzw.
- daß die Zielachse eines Kompensatornivelliers horizontal verläuft, wenn sich der Kompensator im Arbeitsbereich befindet,

ist bei Aufgabenstellungen mit einer hohen Genauigkeitsanforderung (Feinnivellement) der systematische Anteil der Vertikalrefraktion zu berücksichtigen, wenn die Restneigung der Ziellinie  $\alpha$  mit ausreichender Genauigkeit bestimmt werden soll. Dieser Umstand ist in der Literatur hinlänglich bekannt und wird z.B. in (JORDAN et al. 1956, S. 96 ff.) und (DEUMLICH und STAIGER 2002, S. 287) im Zusammenhang mit dem Justierverfahren nach Kukkamäki abgehandelt. Rechnet man den in diesen Literaturstellen benutzen Korrekturwert in eine anschauliche Größe um, so erhält man einen Refraktionskoeffizienten von  $k = -1.14$  (NEITZEL und PETROVIC 2004). Dem gegenüber steht der „üblicherweise“ verwendete Wert von  $k = 0.13$  (siehe z.B. ZEISS 1999, S. 3-8). Eine eingehende Diskussion über die Herkunft und Brauchbarkeit dieser Werte wurde in (NEITZEL und PETROVIC 2004) geführt, mit der Schlußfolgerung, daß die Frage nach dem „richtigen“ Wert für den Refraktionskoeffizienten natürlich nicht allgemeingültig beantwortet werden kann. Ebenso wurde aufgezeigt, daß die Verwendung eines nicht zutreffenden Wertes für den Refraktionskoeffizienten die Bestimmung der Restneigung z.B. bei dem Verfahren nach Kukkamäki um 1.23 Sekunden verfälschen kann (mit  $\Delta k = 1.27$ ). Daraufhin wurde in (NEITZEL und PETROVIC 2004) motiviert, die Zielweiten für eine Minimalkonfiguration unter folgenden Gesichtspunkten auszuwählen:

- Günstige Geometrie, d.h. ein möglichst geringer mittlerer Fehler der Restneigung  $\alpha$ ,
- möglichst geringer Einfluß der Refraktion auf die Bestimmung der Restneigung  $\alpha$ .

Im folgenden soll nun eine Minimalkonfiguration (d.h. ein Meßaufbau, bei dem keine Überbestimmung vorhanden ist) für die Bestimmung der Restneigung im Feldverfahren entwickelt werden, bei der die *tatsächlich* herrschende Vertikalrefraktion berücksichtigt wird. In diesem Sinne ist auch das Wort „streng“ in der Überschrift dieses Artikels zu verstehen. Es geht also nicht darum „irgendeinen“ Wert für die Refraktion anzubringen, sondern einen, der den tatsächlichen Verhältnissen entspricht. Als Ausgangspunkt für die Entwicklung des neuen Ansatzes dienen die in (NEITZEL und PETROVIC 2004) vorgestellten Formeln für ein verallgemeinertes Feldverfahren und die aus der Literatur bekannten Formeln für die Berücksichtigung der Krümmung der Niveaulächen und des Refraktionseinflusses.

Die numerischen Beispiele zur Auswahl günstiger Zielweiten beziehen sich auf die Verwendung eines Digitalnivelliers, die Schlußfolgerungen lassen sich natürlich auch auf die Verwendung analoger Geräte übertragen.

## 2 Berücksichtigung der Krümmung der Niveaulächen

Die für die Bestimmung der Restneigung  $\alpha$  durchgeführten Lattenablesungen sind im ersten Schritt in ein planares Modell für die Niveaulächen des Erdschwerefeldes zu überführen. Aus der Rohablesung  $l_0$  erhält man mit

$$l_{\text{planar}} = l_0 - K_1 \quad (1)$$

eine Ablesung im planaren Modell, wobei der Korrekturwert mit

$$K_1 \approx \frac{s^2}{2R} \quad \text{mit } s = \text{Zielweite [m]} \text{ und } R = 6380000 \text{ m} \quad (2)$$

angenommen werden kann (vgl. JORDAN et al. 1956, S. 105 ff.).

### 3 Berücksichtigung des Refraktionseinflusses

Im zweiten Schritt ist der systematische Anteil der vertikalen Ablenkung des Zielstrahls in Folge der Refraktion zu berücksichtigen. Die endgültige Lattenablesung erhält man aus

$$l = l_{\text{planar}} + K_2 = l_0 - K_1 + K_2 \quad , \quad (3)$$

wobei der Korrekturwert in der Form

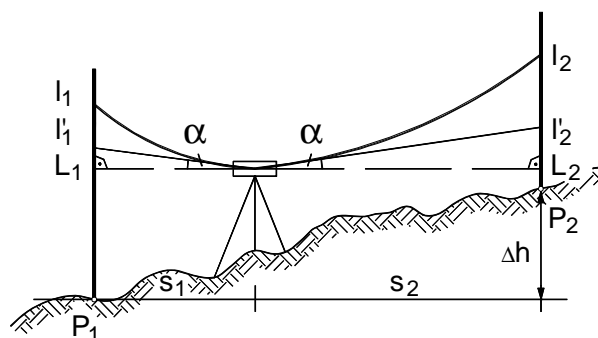
$$K_2 = k \cdot \frac{s^2}{2R} \quad \text{mit } k = \text{Refraktionskoeffizient} \quad (4)$$

verwendet werden kann (vgl. JORDAN et al. 1956, S. 106 ff.). Das Problem besteht aber darin, daß der Wert des zum Meßzeitpunkt tatsächlich vorherrschenden Refraktionskoeffizienten nicht bekannt ist. In der Literatur wird in diesem Fall oftmals vorgeschlagen, einen bestimmten überlieferten Wert, der auf Untersuchungen von Kukkamäki beruht, für die Korrektur der Ablesungen einzusetzen. Ob dieser Wert der tatsächlichen Refraktion am Meßtag entspricht, ist dann aber leider dem Zufall überlassen. In (DEUMLICH und STAIGER 2002, S. 287) wird dann auch folgerichtig darauf hingewiesen, daß eine Korrektur in dieser Form mit „großen Unsicherheiten“ behaftet ist. In vielen Lehrbüchern (z.B. KAHMEN 1997, S. 366) wird diese Unsicherheit gar nicht erwähnt, sondern es wird ein fester Korrekturfaktor für die Berücksichtigung von „Erdkrümmung“ und Refraktion angegeben.

Aufgrund der beschriebenen Unsicherheit bei der Berücksichtigung der Refraktion wurden in (NEITZEL und PETROVIC 2004) Meßanordnungen (als Weiterentwicklung der traditionellen Verfahren) vorgeschlagen, bei denen ein möglichst geringer Einfluß der Refraktion auf die Bestimmung der Restneigung  $\alpha$  auftritt. Im folgenden sollen nun die Formeln für eine erweiterte Minimalkonfiguration entwickelt werden, mit denen die tatsächliche Refraktion bei der Bestimmung der Restneigung im Feldverfahren berücksichtigt wird.

### 4 Bestimmung der Restneigung aus Meßergebnissen unter Berücksichtigung der tatsächlichen Vertikalrefraktion

Weist die Zielachse eine Restneigung  $\alpha$  auf und wird der Zielstrahl infolge der Vertikalrefraktion abgelenkt, so fallen statt der Sollablesungen  $L_1$  und  $L_2$  die tatsächlichen Ablesungen  $l_1$  und  $l_2$  an, wie in Abb. 1 dargestellt.



**Abb. 1: Lattenablesungen im planaren Modell unter Einfluß von Restneigung und Refraktion**

In den weiteren Betrachtungen wird davon ausgegangen, daß die Lattenablesungen  $l$  bereits um den Einfluß der Krümmung der Niveauflächen korrigiert wurden. Die Lattenablesungen unter Berücksichtigung des Refraktionseinflusses ergeben sich dann zu

$$l_1' = l_1 + k \frac{(s_1)^2}{2R} \quad (5)$$

und

$$l_2' = l_2 + k \frac{(s_2)^2}{2R} . \quad (6)$$

Die Bestimmung der Restneigung  $\alpha$  erfolgt dann über den bereits in (NEITZEL und PETROVIC 2004) beschriebenen funktionalen Zusammenhang

$$\frac{l_1' - L_1}{s_1} = \tan \alpha \quad \text{und} \quad \frac{l_2' - L_2}{s_2} = \tan \alpha . \quad (7)$$

Stellt man diese Gleichungen um und setzt (5) und (6) ein, so ergibt sich

$$l_1 = L_1 - k \frac{(s_1)^2}{2R} + s_1 \tan \alpha \quad (8)$$

und

$$l_2 = L_2 - k \frac{(s_2)^2}{2R} + s_2 \tan \alpha . \quad (9)$$

Mit der Abkürzung  $L_1 - L_2 = \Delta h$  erhält man aus der Subtraktion von (8) und (9) mit

$$l_1 - l_2 = \Delta h - \left( (s_1)^2 - (s_2)^2 \right) \frac{k}{2R} + (s_1 - s_2) \tan \alpha \quad (10)$$

eine Gleichung mit drei Unbekannten ( $\Delta h$ ,  $\alpha$ ,  $k$ ). Für die Bestimmung der Restneigung aus Meßergebnissen sind also mindestens drei Gleichungen, d.h. 3 Instrumentenstandpunkte (ISP) und 2 Lattenstandpunkte (LSP) erforderlich. Unter Verwendung der folgenden Notation

$s_i^j$  - Zielweite vom Instrumentenstandpunkt  $i$  zum Zielpunkt  $j$ ,

$l_i^j$  - Ablesung vom Instrumentenstandpunkt  $i$  am Zielpunkt  $j$ ,

$L_i^j$  - „Sollablesung“ vom Instrumentenstandpunkt  $i$  am Zielpunkt  $j$ ,

läßt sich für eine Minimalkonfiguration das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} l_1^1 - l_1^2 &= \Delta h - \left( (s_1^1)^2 - (s_1^2)^2 \right) \frac{k}{2R} + (s_1^1 - s_1^2) \tan \alpha \\ l_2^1 - l_2^2 &= \Delta h - \left( (s_2^1)^2 - (s_2^2)^2 \right) \frac{k}{2R} + (s_2^1 - s_2^2) \tan \alpha \\ l_3^1 - l_3^2 &= \Delta h - \left( (s_3^1)^2 - (s_3^2)^2 \right) \frac{k}{2R} + (s_3^1 - s_3^2) \tan \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

aufstellen. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} l_1^1 - l_1^2 &= \Delta l_1, \quad l_2^1 - l_2^2 = \Delta l_2, \quad l_3^1 - l_3^2 = \Delta l_3, \\ s_1^1 - s_1^2 &= \Delta s_1, \quad s_2^1 - s_2^2 = \Delta s_2, \quad s_3^1 - s_3^2 = \Delta s_3, \\ (s_1^1)^2 - (s_1^2)^2 &= \Delta \bar{s}_1, \quad (s_2^1)^2 - (s_2^2)^2 = \Delta \bar{s}_2, \quad (s_3^1)^2 - (s_3^2)^2 = \Delta \bar{s}_3 \end{aligned}$$

und der Substitution  $t = \tan \alpha$  erhält man daraus das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & \Delta s_1 & -\frac{\Delta \bar{s}_1}{2R} \\ 1 & \Delta s_2 & -\frac{\Delta \bar{s}_2}{2R} \\ 1 & \Delta s_3 & -\frac{\Delta \bar{s}_3}{2R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h \\ t \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

mit der Lösung

$$\Delta h = \frac{\Delta s_1 \Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 \Delta l_2 - \Delta \bar{s}_2 \Delta l_3) - \Delta s_2 \Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 \Delta l_1 - \Delta \bar{s}_1 \Delta l_3) + \Delta s_2 \Delta s_3 (\Delta \bar{s}_2 \Delta l_1 - \Delta \bar{s}_1 \Delta l_2)}{\Delta s_1 \Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) - \Delta s_2 \Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) + \Delta s_2 \Delta s_3 (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1)}, \quad (13)$$

$$t = \frac{\Delta l_2 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) - \Delta l_1 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) - \Delta l_3 (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1)}{\Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) - \Delta s_1 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) - \Delta s_3 (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1)}; \quad \alpha = \arctan t \quad (14)$$

und

$$k = 2R \cdot \frac{\Delta l_2 (\Delta s_3 - \Delta s_1) - \Delta l_1 (\Delta s_3 - \Delta s_2) - \Delta l_3 (\Delta s_2 - \Delta s_1)}{\Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) - \Delta s_1 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) - \Delta s_3 (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1)}. \quad (15)$$

Die Sollablesungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} L_1^1 &= l_1^1 + \frac{k}{2R} (s_1^1)^2 - s_1^1 t, & L_1^2 &= l_1^2 + \frac{k}{2R} (s_1^2)^2 - s_1^2 t \\ L_2^1 &= l_2^1 + \frac{k}{2R} (s_2^1)^2 - s_2^1 t, & L_2^2 &= l_2^2 + \frac{k}{2R} (s_2^2)^2 - s_2^2 t \\ L_3^1 &= l_3^1 + \frac{k}{2R} (s_3^1)^2 - s_3^1 t, & L_3^2 &= l_3^2 + \frac{k}{2R} (s_3^2)^2 - s_3^2 t \end{aligned} \quad (16)$$

Mit (14) steht nun eine Formel zur Verfügung, mit der die Bestimmung der Restneigung  $\alpha$  unter Berücksichtigung der tatsächlich zum Meßzeitpunkt herrschenden Vertikalrefraktion möglich ist. Zudem ist mit (13) eine Höhenübertragung unter Berücksichtigung der vorhandenen Restneigung und der Refraktion möglich. Der Wert des Refraktionskoeffizienten läßt sich aus (15) berechnen.

Der generelle Meßaufbau für die neu entwickelte Minimalkonfiguration ist in Abb. 2 dargestellt.

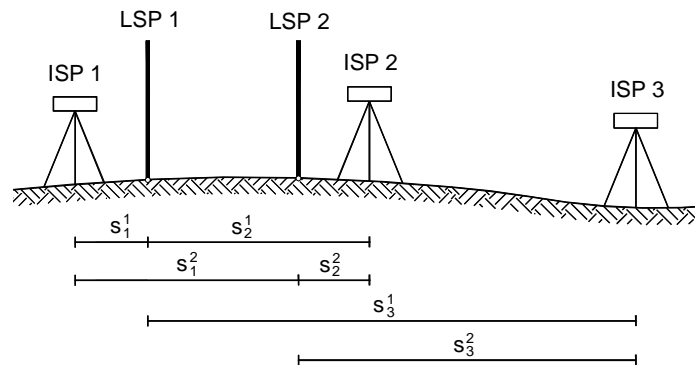


Abb. 2: Meßaufbau für die neu entwickelte Minimalkonfiguration

#### 4.1 Auswahl günstiger Konfigurationen

Die Frage, die es nun zu beantworten gilt, ist die nach einem möglichst „günstigen“ Meßaufbau, wobei folgende Kriterien zu beachten sind:

- Der Meßaufbau ist so zu wählen, daß keine Drehung des Instrumentes erforderlich ist (Ausschalten des Höhenversatzes).
- Vermeidung sehr kurzer Zielweiten, um einen eventuellen Fehlereinfluß durch den Gang der Fokussierlinse gering zu halten.
- Günstige Geometrie des Meßaufbaus, d.h. Auswahl von Zielweiten, die zu einem möglichst geringen mittleren Fehler der Restneigung  $\alpha$  führen.

Der erste Punkt kann erfüllt werden, wenn alle Latten- und Instrumentenstandpunkte in einer gemeinsamen Vertikalebene liegen und die Standpunkte wie in Abb. 2 dargestellt ausgewählt werden.

Zu dem zweiten Punkt ist anzumerken, daß die am Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik der Technischen Universität Berlin durchgeführten Überprüfungen analoger Nivelliergeräte der Baureihe ZEISS Ni2 keinen Fehlereinfluß durch den Gang der Fokussierlinse aufgezeigt haben.<sup>1</sup> Dem gegenüber stehen Untersuchungen von Digitalnivellieren, von denen (WEHMANN) berichtet. Dort wird angegeben, daß die Überprüfung von Digitalnivellieren unterschiedlicher Hersteller ergeben hat, daß es bereits bei einer Zielweitendifferenz von über 15 m zu einem erheblichen Fehlereinfluß durch den Gang der Fokussierlinse kommen kann. Es wird berichtet, daß die durchgeführten Untersuchungen eine Verfälschung der Meßwerte von bis zu 0.60 mm bei einer Zielweitendifferenz von 25 m (30 m zu 5 m) aufgezeigt haben. Ein derart starker Fehlereinfluß durch den Gang der Fokussierlinse muß natürlich gesondert untersucht werden und falls ein derartiger Fehlereinfluß festgestellt wird, sollen die Rohablesungen zuerst entsprechend korrigiert werden. Diese Untersuchung ist nicht Gegenstand dieses Artikels, in dem die Annahme gemacht wird, daß die Lattenablesungen bereits um den Fehlereinfluß durch den Gang der Fokussierlinse korrigiert wurden oder daß der Fehlereinfluß unterhalb der Meßgenauigkeit liegt. Führt man die Untersuchungen zum Gang der Fokussierlinse nicht durch (was in der Praxis häufig der Fall ist), so kann man versuchen, diesen Fehlereinfluß durch die Auswahl der Zielweiten möglichst gering zu halten. Aus diesem Grund werden bei den Untersuchungen zur Auswahl günstiger Zielweiten auch immer solche angegeben, deren Zielweitendifferenz  $\leq 15$  m ist.

Die nun folgenden Untersuchungen zur Auswahl günstiger Zielweiten basieren auf dem mittleren Fehler der Lattenablesungen  $m_{l_j}$  und der Streckenmessung der Zielweiten  $m_{s_j}$ . Wendet man auf (14) das Fehlerfortpflanzungsgesetz an, so erhält man den mittleren Fehler der Restneigung  $m_\alpha$  aus

$$(m_\alpha)^2 = \left( \frac{\partial \alpha}{\partial l_1^1} \right)^2 (m_{l_1^1})^2 + \dots + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial l_3^2} \right)^2 (m_{l_3^2})^2 + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s_1^1} \right)^2 (m_{s_1^1})^2 + \dots + \left( \frac{\partial \alpha}{\partial s_3^2} \right)^2 (m_{s_3^2})^2 . \quad (17)$$

Bildet man die partiellen Ableitungen und verwendet für alle mittleren Fehler  $m_{s_j}$  einen einheitlichen Wert<sup>2</sup>  $m_s$  als obere Grenze aller Streckenfehler, so erhält man

$$m_\alpha = \frac{1}{(1+t^2)^{1/2}} \left[ N \left( A^2 \left( (m_{l_1^1})^2 + (m_{l_2^2})^2 \right) + B^2 \left( (m_{l_1^1})^2 + (m_{l_2^2})^2 \right) + C^2 \left( (m_{l_3^2})^2 + (m_{l_3^2})^2 \right) \right) + (D^2 + E^2 + F^2 + G^2 + H^2 + I^2) (m_s)^2 \right]^{1/2} \quad (18)$$

mit

$$N = \Delta s_2 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) - \Delta s_1 (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) - \Delta s_3 (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1) ,$$

$$A = \Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2 ,$$

$$B = \Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1 ,$$

$$C = \Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1 ,$$

$$D = 2s_1^1 (\Delta l_3 - \Delta l_2) - t \left( 2s_1^1 (\Delta s_3 - \Delta s_2) - (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) \right) = \left( t - s_1^1 \cdot \frac{k}{R} \right) (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) = \left( t - s_1^1 \cdot \frac{k}{R} \right) A ,$$

$$E = -2s_1^2 (\Delta l_3 - \Delta l_2) + t \left( 2s_1^2 (\Delta s_3 - \Delta s_2) - (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) \right) = - \left( t - s_1^2 \cdot \frac{k}{R} \right) (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_2) = - \left( t - s_1^2 \cdot \frac{k}{R} \right) A ,$$

$$F = -2s_2^1 (\Delta l_3 - \Delta l_1) + t \left( 2s_2^1 (\Delta s_3 - \Delta s_1) - (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) \right) = - \left( t - s_2^1 \cdot \frac{k}{R} \right) (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) = - \left( t - s_2^1 \cdot \frac{k}{R} \right) B ,$$

<sup>1</sup> Mit Hilfe von Lattenablesungen über einen Zielweitenbereich von ca. 6 m bis 50 m wurde der tatsächliche Verlauf der Ziellinie ermittelt. Die Restneigung wurde mit Hilfe einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten bestimmt, danach wurde der Ziellinienverlauf um den Anteil der Restneigung reduziert. Die Residuen (hier Abweichungen der Ziellinie von einem horizontalen Verlauf) lagen unterhalb der Meßgenauigkeit, so daß keine Hinweise auf fehlende Modellanteile (z.B. Gang der Fokussierlinse) erkennbar waren.

<sup>2</sup> Bei nahezu allen Digitalnivellieren wird von den Herstellern keine entfernungsabhängige Genauigkeit der Streckenmessung angegeben (siehe DEUMLICH und STAIGER 2002, S. 257 ff.), sondern lediglich eine Genauigkeit bei einer bestimmten Zielweite (z.B.  $m_s = 25 - 30$  mm bei 20 m Zielweite).

$$G = 2s_2^2(\Delta l_3 - \Delta l_1) - t \left( 2s_2^2(\Delta s_3 - \Delta s_1) - (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) \right) = \left( t - s_2^2 \cdot \frac{k}{R} \right) (\Delta \bar{s}_3 - \Delta \bar{s}_1) = \left( t - s_2^2 \cdot \frac{k}{R} \right) B \quad ,$$

$$H = 2s_3^1(\Delta l_2 - \Delta l_1) - t \left( 2s_3^1(\Delta s_2 - \Delta s_1) - (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1) \right) = \left( t - s_3^1 \cdot \frac{k}{R} \right) (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1) = \left( t - s_3^1 \cdot \frac{k}{R} \right) C \quad ,$$

$$I = -2s_3^2(\Delta l_2 - \Delta l_1) + t \left( 2s_3^2(\Delta s_2 - \Delta s_1) - (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1) \right) = - \left( t - s_3^2 \cdot \frac{k}{R} \right) (\Delta \bar{s}_2 - \Delta \bar{s}_1) = - \left( t - s_3^2 \cdot \frac{k}{R} \right) C \quad .$$

Da aus dem Ausdruck (18) nicht unmittelbar ersichtlich ist, bei welcher Zielweitenauswahl es sich um eine günstige Konfiguration handelt, soll diese Frage nun mit Hilfe von numerischen Beispielen geklärt werden. Als entfernungsabhängiges Genauigkeitsmaß für eine einzelne Lattenablesung mit einem Digitalnivellier wird

$$m_{l_j}(s_i^j) [\text{mm}] = m_0 \cdot s_i^j [\text{m}] \quad \text{mit} \quad m_0 = 0.002 \quad (19)$$

und als mittlerer Fehler der Zielweitenmessung der einheitliche Wert  $m_s = 30$  mm angesetzt (vgl. NEITZEL und PETROVIC 2004). Die Berechnungen wurden für eine angenommene Restneigung von  $\alpha = 5''$  und einen Refraktionskoeffizienten von  $k = -1.0$  durchgeführt. Der Meßaufbau, auf den sich die Beispielrechnungen beziehen, ist in Abb. 2 dargestellt, wobei die Latten- und Instrumentenstandpunkte in einer gemeinsamen Vertikalebene liegen. In Tab. 1 bis Tab. 6 sind die mittleren Fehler  $m_\alpha$  aus (18) aufgeführt, die sich bei einem vorgegebenen Lattenabstand für unterschiedliche Zielweitenkombinationen ergeben.

**Tab. 1: Mittlere Fehler  $m_\alpha$  bei Lattenabstand 10 m, längste Zielweite 50 m**

$s_1^1$	$s_1^2$	$s_2^1$	$s_2^2$	$s_3^1$	$s_3^2$	$m_\alpha$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	["]
5	15	15	5	50	40	0.97
7	17	17	7	50	40	1.22
10	20	20	10	50	40	1.68

**Tab. 2: Mittlere Fehler  $m_\alpha$  bei Lattenabstand 10 m, längste Zielweite 60 m**

$s_1^1$	$s_1^2$	$s_2^1$	$s_2^2$	$s_3^1$	$s_3^2$	$m_\alpha$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	["]
5	15	15	5	60	50	0.92
7	17	17	7	60	50	1.14
10	20	20	10	60	50	1.52

**Tab. 3: Mittlere Fehler  $m_\alpha$  bei Lattenabstand 15 m, längste Zielweite 50 m**

$s_1^1$	$s_1^2$	$s_2^1$	$s_2^2$	$s_3^1$	$s_3^2$	$m_\alpha$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	["]
5	20	20	5	50	35	0.92
7	22	22	7	50	35	1.13
10	25	25	10	50	35	1.52

**Tab. 4: Mittlere Fehler  $m_\alpha$  bei Lattenabstand 15 m, längste Zielweite 60 m**

$s_1^1$	$s_1^2$	$s_2^1$	$s_2^2$	$s_3^1$	$s_3^2$	$m_\alpha$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	["]
5	20	20	5	60	45	0.84
7	22	22	7	60	45	1.02
10	25	25	10	60	45	1.32

**Tab. 5: Mittlere Fehler  $m_\alpha$  bei Lattenabstand 20 m, längste Zielweite 50 m**

$s_1^1$	$s_1^2$	$s_2^1$	$s_2^2$	$s_3^1$	$s_3^2$	$m_\alpha$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	["]
5	25	25	5	50	30	0.96
7	27	27	7	50	30	1.18
10	30	30	10	50	30	1.58

**Tab. 6: Mittlere Fehler  $m_\alpha$  bei Lattenabstand 20 m, längste Zielweite 60 m**

$s_1^1$	$s_1^2$	$s_2^1$	$s_2^2$	$s_3^1$	$s_3^2$	$m_\alpha$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	["]
5	25	25	5	60	40	0.85
7	27	27	7	60	40	1.01
10	30	30	10	60	40	1.29

Bei der Interpretation der Ergebnisse fällt auf, daß bei der Verwendung der gleichen kürzesten Zielweite ähnliche Ergebnisse für den mittleren Fehler  $m_\alpha$  erzielt werden. So liegt  $m_\alpha$  bei  $s_1^1 = s_2^2 = 5$  m im Bereich von 0.84 bis 0.97 Sekunden, bei  $s_1^1 = s_2^2 = 7$  m im Bereich von 1.01 bis 1.22 Sekunden und bei  $s_1^1 = s_2^2 = 10$  m im Bereich von 1.29 bis 1.68 Sekunden. Um den von (WEHMANN) beschriebenen Fehlereinfluß aufgrund des Gangs der Fokussierlinse möglichst gering zu halten, sollte man große Zielweitendifferenzen vermeiden. Für die praktische Anwendung bieten sich somit die Zielweiten in Tab. 1 und Tab. 2 mit einer Zielweitendifferenz von 10 m oder die Zielweiten aus Tab. 3 und Tab. 4 mit einer Zielweitendifferenz von 15 m an. Möchte man zudem sehr kurze Zielweiten vermeiden, so bietet eine Wahl von  $s_1^1 = s_2^2 = 7$  m einen guten Kompromiß zwischen der Forderung nach einem geringen mittleren Fehler  $m_\alpha$  und der Forderung nach einem geringen Einfluß eines möglicherweise vorhandenen Fehlereinflusses durch den Gang der Fokussierlinse.

Um die mit der neuen Minimalkonfiguration erreichbare Genauigkeit der Restneigungsbestimmung besser beurteilen zu können, soll diese nun mit der möglichen Genauigkeit eines der günstigen traditionellen Verfahren (2 Lattenstandpunkte, 2 Instrumentenstandpunkte) verglichen werden. Für diesen Vergleich wird das Verfahren nach Näbauer<sup>3</sup> verwendet, das mit den gleichen Eingangswerten für  $\alpha$ ,  $m_{i,j}$  und  $m_s$  bei der Bestimmung der Restneigung einen mittleren Fehler von  $m_\alpha = 0.65''$  (siehe NEITZEL und PETROVIC 2004) liefert. Darüber hinaus ist die Bestimmung aber noch mit einer tatsächlichen Verfälschung von

$$\Delta\alpha ["] = 0.73 \cdot \Delta k \quad (20)$$

behaftet<sup>4</sup>, wobei mit  $\Delta k$  die Abweichung des verwendeten Refraktionskoeffizienten vom tatsächlichen Wert bezeichnet ist. Eine fehlerhafte Annahme über den Wert des Refraktionskoeffizienten von z.B.  $\Delta k = 1$ , führt somit dazu, daß die Restneigung um 0.73 Sekunden falsch bestimmt wird. Wählt man bei der neuen Minimalkonfiguration z.B. die Zielweiten  $s_1^1 = s_2^2 = 7$  m,  $s_1^2 = s_2^1 = 22$  m,  $s_3^1 = 50$  m und  $s_3^2 = 35$  m, so erhält man für das betrachtete Beispiel mit  $m_\alpha = 1.13''$  (siehe Tab. 3) zwar einen größeren Wert als bei dem Verfahren nach Näbauer, dafür ist das gesuchte Ergebnis, nämlich die Restneigung  $\alpha$ , frei von einer Verfälschung durch unrichtige Annahmen über den Refraktionskoeffizienten. Somit ist sofort einzusehen, daß mit der neu entwickelten Minimalkonfiguration eine wesentlich sicherere Bestimmung der Restneigung aufgrund der Berücksichtigung des tatsächlichen Refraktionseinflusses möglich ist.

<sup>3</sup> Das Verfahren „aus der Mitte mit kürzester Zielweite“ wird wegen des möglichen Einflusses eines Höhenversatzes und der sehr kurzen Zielweite nicht als Beispiel für eine günstige Konfiguration verwendet.

<sup>4</sup> Die Berechnung des Einflußfaktors erfolgte mit der Formel (34) aus (NEITZEL und PETROVIC 2004).

## 5 Hinweise für die praktische Anwendung und numerisches Beispiel

In der Herleitung der Formeln für die neue Minimalkonfiguration wurde davon ausgegangen, daß der Refraktionskoeffizient für die Dauer der Messung als konstant angenommen werden kann und somit ein einheitlicher Wert  $k$  für die Berücksichtigung der Vertikalrefraktion bei allen Beobachtungen verwendet werden kann. Um diese Annahmen bestmöglich zu erfüllen, sind bei den Arbeiten im Felde einige bekannte Grundregeln zu beachten:

- Der Meßaufbau soll in möglichst horizontalem Gelände erfolgen.
- Lattenanzielungen unterhalb von 0.5 m sind grundsätzlich zu vermeiden.
- Auf eine einheitliche Bodenbeschaffenheit des Geländes ist zu achten.
- Eine partielle Sonneneinstrahlung (bzw. Abschattung) der Prüfstrecke ist zu vermeiden.
- Die Messungen sollen zügig durchgeführt werden.

Wenn aufgrund örtlicher Hindernisse nicht mit den in Tab. 1 bis Tab. 6 aufgeführten Lattenabständen und Zielweiten gearbeitet werden kann, so kann eine alternative Auswahl wie folgt getroffen werden:

- $s_1^1 = s_2^2 =$  kürzeste Zielweite,
- $s_1^2 = s_2^1 =$  kürzeste Zielweite plus Lattenabstand,
- $s_3^1 =$  längste Zielweite,
- $s_3^2 =$  längste Zielweite minus Lattenabstand.

Bei der Auswahl der Zielweiten ist aber stets darauf zu achten, daß der Zielweitenbereich für die vorliegende Aufgabenstellung (z.B. Feinnivellement) abgedeckt wird. Da sich bei einer veränderten Festlegung von Lattenabstand und Zielweiten jeweils die Geometrie des Meßaufbaus ändert, ist mit Hilfe von (18) zu überprüfen, ob die Genauigkeit der bestimmten Restneigung für die vorliegende Aufgabenstellung ausreichend ist. In jedem Fall sind die Messungen mit großer Sorgfalt durchzuführen, um das Genauigkeitspotential des Meßsystems möglichst voll auszuschöpfen.

Für einige gängige Instrumententypen schlägt (WEHMANN) die folgende Zielweitemauswahl vor:

- $s_1^1 = s_2^2 = 7$  m,  $s_1^2 = s_2^1 = 22$  m,  $s_3^1 = 60$  m und  $s_3^2 = 45$  m für die Geräte ZEISS/TRIMBLE DiNi 10, 11, 12 und LEICA DNA 03 und 10.
- $s_1^1 = s_2^2 = 7$  m,  $s_1^2 = s_2^1 = 22$  m,  $s_3^1 = 50$  m und  $s_3^2 = 35$  m für TOPCON-Digitalnivelliere und ältere Baureihen der Firma LEICA.

Um den Gang der Berechnung der Restneigung mit Hilfe der neuen Minimalkonfiguration zu veranschaulichen, folgt ein numerisches Beispiel. In Tab. 7 sind die Rohablesungen an der Latte  $(l_0)_i^j$ , die Zielweiten  $s_i^j$  und die mittleren Fehler der Lattenablesung  $m_{l_i^j}$ , die sich aus (19) ergeben, dargestellt. Der mittlere Fehler der Streckenmessung wird einheitlich mit  $m_s = 30$  mm angenommen.

**Tab. 7: Lattenablesungen, Zielweiten und mittlere Fehler der Lattenablesungen**

$(l_0)_1^1$ [m]	$(l_0)_1^2$ [m]	$(l_0)_2^1$ [m]	$(l_0)_2^2$ [m]	$(l_0)_3^1$ [m]	$(l_0)_3^2$ [m]
1.50018	1.40061	1.65061	1.55018	1.5516	1.45104
$s_1^1$ [m]	$s_1^2$ [m]	$s_2^1$ [m]	$s_2^2$ [m]	$s_3^1$ [m]	$s_3^2$ [m]
7	22	22	7	50	35
$m_{l_1^1}$ [mm]	$m_{l_1^2}$ [mm]	$m_{l_2^1}$ [mm]	$m_{l_2^2}$ [mm]	$m_{l_3^1}$ [mm]	$m_{l_3^2}$ [mm]
0.014	0.044	0.044	0.014	0.100	0.070

Im ersten Schritt werden die Lattenablesungen mit (1) und (2) in ein planares Modell für die Niveaulächen des Erdschwerfeldes überführt und man erhält die reduzierten Ablesungen in Tab. 8.



**Tab. 8: Lattenablesungen im planaren Modell**

$(l_0)_1^1$ [m]	$(l_0)_1^2$ [m]	$(l_0)_2^1$ [m]	$(l_0)_2^2$ [m]	$(l_0)_3^1$ [m]	$(l_0)_3^2$ [m]
1.50018	1.40061	1.65061	1.55018	1.5516	1.45104
$K_1$ [mm]	$K_1$ [mm]	$K_1$ [mm]	$K_1$ [mm]	$K_1$ [mm]	$K_1$ [mm]
0.004	0.038	0.038	0.004	0.196	0.096
$l_1^1$ [m]	$l_1^2$ [m]	$l_2^1$ [m]	$l_2^2$ [m]	$l_3^1$ [m]	$l_3^2$ [m]
1.50018	1.40057	1.65057	1.55018	1.55140	1.45094

Unter Verwendung der Ablesungen im planaren Modell werden die Zwischenwerte  $\Delta l_1 = 0.09960$  m,  $\Delta l_2 = 0.10040$  m,  $\Delta l_3 = 0.10046$  m und  $\Delta s_1 = -15$  m,  $\Delta s_2 = 15$  m,  $\Delta s_3 = 15$  m und  $\Delta \bar{s}_1 = -435$  m<sup>2</sup>,  $\Delta \bar{s}_2 = 435$  m<sup>2</sup>,  $\Delta \bar{s}_3 = 1275$  m<sup>2</sup> berechnet. Setzt man diese Werte nun in die Formeln (13), (14), (15) und (18) ein, so erhält man als Ergebnis  $\Delta h = 0.10000$  m,  $\alpha = 4.99''$  mit  $m_\alpha = 1.13''$  und  $k = -0.97$ . Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, daß in dem Wert  $\Delta h$  bereits die Restneigung und die Refraktion berücksichtigt ist und daß in dem Wert für die Restneigung  $\alpha$  bereits die tatsächliche Vertikalrefraktion (in diesem Beispiel mit  $k = -0.97$ ) berücksichtigt ist.

## 6 Schlußbetrachtung

Auf Grundlage der verallgemeinerten Formel für die Bestimmung der Restneigung (NEITZEL und PETROVIC 2004) wurde eine neue Minimalkonfiguration mit 2 Lattenstandpunkten und 3 Instrumentenstandpunkten entwickelt. Damit ist eine Bestimmung der Restneigung unter Berücksichtigung der tatsächlichen Vertikalrefraktion möglich. Hinweise für den Meßaufbau wurden gegeben und in einer Skizze verdeutlicht.

Anhand numerischer Untersuchungen wurden Vorschläge für die Auswahl günstiger Zielweiten gemacht, wobei auch ein möglicher Fehlereinfluß durch den Gang der Fokussierlinse in Betracht gezogen wurde. Durch einen Vergleich mit dem traditionellen Verfahren nach Näbauer wurde aufgezeigt, daß mit der neuen Minimalkonfiguration eine sicherere Bestimmung der Restneigung möglich ist.

Die Handhabung der Formeln (13), (14), (15) und (18) im Felde stellt natürlich bei der Verwendung eines Digitalnivelliers keinerlei Probleme dar, da sie in die Software des Gerätes integriert werden können. Die Benutzerführung kann dann über Anweisungen im Display (analog zu den traditionellen Verfahren) erfolgen. Es wäre wünschenswert, wenn die Gerätehersteller die neu entwickelte Minimalkonfiguration in die Gerätesoftware integrieren würden.

Eine weitere Steigerung der Genauigkeit und der Zuverlässigkeit der Bestimmung der Restneigung unter Berücksichtigung der tatsächlichen Vertikalrefraktion ist aus einer überbestimmten Konfiguration mit Hilfe einer Ausgleichung möglich, was als weiterführende Untersuchung geplant ist.

## Literatur

- DEUMLICH, F. und STAIGER, R.: Instrumentenkunde der Vermessungstechnik. 9., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2002
- JORDAN, EGGERT, KNESSL: Handbuch der Vermessungskunde. Zehnte, völlig neu bearbeitete und neugegliederte Ausgabe. Band III (Höhenmessung, Tachymetrie). J. B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart, 1956
- KAHMEN, H.: Vermessungskunde. 19., überarbeitete Auflage. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1997
- NEITZEL, F. und PETROVIC, S.: Ein verallgemeinertes Feldverfahren zur Überprüfung von Nivelliergeräten. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 2004 (im Druck)
- WEHMANN, W.: Persönliche Korrespondenz des Verfassers F. Neitzel mit Prof. Dr.-Ing. Wolffried Wehmann von der HTW Dresden (FH), November 2003 und Februar 2004
- ZEISS: Bedienungsanleitung, Digitalnivelliere DiNi 12, 12 T, 22. ZSP Geodätische Systeme GmbH, Jena, 1999

Anschrift der Verfasser:  
 Dr.-Ing. FRANK NEITZEL  
 Institut für Geodäsie und  
 Geoinformationstechnik  
 Technische Universität Berlin  
 Straße des 17. Juni 135

D-10623 Berlin  
Tel.: ++ 49-30/314-24332  
Fax: ++ 49-30/314-21973  
E-Mail: frank@mca.bv.tu-berlin.de

Privatdozent  
Dr. techn. habil. SVETOZAR PETROVIC  
GeoForschungsZentrum Potsdam  
Department 1: Geodäsie und Fernerkundung  
Sektion 1.3: Gravitationsfeld und Erdmodelle  
Telegrafenberg C3  
D-14473 Potsdam  
Tel.: ++ 49-331/288-1741  
Fax: ++ 49-331/288-1732  
E-Mail: sp@gfz-potsdam.de

### **Zusammenfassung**

**Es wird eine neue Minimalkonfiguration zur Bestimmung der Restneigung eines Nivelliergerätes im Feldverfahren unter Berücksichtigung der tatsächlich zum Meßzeitpunkt herrschenden Vertikalrefraktion vorgestellt. Beispiele für die Auswahl der Zielweiten und Hinweise für die praktische Anwendung der neuen Minimalkonfiguration werden angegeben.**

### **Abstract**

**A new minimal configuration for the determination of the error of collimation of a levelling instrument in field, taking into account the actual vertical refraction effective at the moment of measurement, is presented. Examples for the choice of ranges and hints for practical application of the new minimal configuration are given as well.**