Nullvarianz-Rechenbasis und Eigenschaften der Koordinaten bei freier Netzausgleichung

Frank Neitzel

Zusammenfassung
Es wird gezeigt, dass sich die Datumsfestlegung bei einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung als Spezialfall der Auswahl einer Nullvarianz-Rechenbasis interpretieren lässt. Zudem wird die Frage geklärt, ob die Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung zu den schätzbaren Größen eines geodätischen Netzes gehören können.

Summary
It is shown that the definition of the geodetic datum in a free net adjustment with minimum trace of the covariance matrix can be interpreted as a special case of choice of a zero-variance computational base. Furthermore the question is answered whether the coordinates obtained from a free net adjustment can belong to the estimable quantities of a geodetic network.

1 Einführung

Die Speicherung und Weiterverarbeitung geometrischer Informationen bei nahezu allen geodätischen Fragestellungen erfolgt i.d.R. in der Form von Koordinaten, zudem gewinnen sie als Schnittstelle für die interdisziplinäre Zusammenarbeit zunehmend an Bedeutung. Nach einer zweckmäßigen Auswahl von Punkten, die ein Messobjekt diskretisieren, kann durch Messung von Horizontal- und Vertikalwinkeln, Strecken, Basislinien mit Hilfe von GPS und Höhenunterschieden die relative Lage dieser Punkte zueinander (innere Netzgeometrie) bestimmt werden. Mit der Problemstellung, aus diesen relativen Informationen Koordinaten für die Netzpunkte mit Hilfe einer freien Netzausgleichung zu erzeugen, beschäftigt sich eine Vielzahl von Publikationen, zumeist basierend auf (Meissl 1962, 1969). Einen aktuellen Überblick zu dieser Thematik bieten z.B. (Welsch et al. 2000, S. 197 ff.) und (Niemeier 2002, S. 205 ff.).

Im Folgenden soll aufgezeigt werden, dass sich die Datumsfestlegung bei einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung als spezielle Auswahl einer „Nullvarianz-Rechenbasis" interpretieren lässt. Zudem soll die Frage geklärt werden, ob die Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung („innere Koordinaten") zu den „schätzbare Größen" gezählt werden können. Hierüber bestehen in der Literatur zum Teil unterschiedliche Auffassungen.

2 Die Nullvarianz-Rechenbasis bei freier Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung

Um auf Grundlage relativer Messungen Koordinaten bestimmen zu können, sind grundsätzlich zwei Schritte erforderlich:

1. Festlegung eines Referenzrahmens (Koordinatensystem). Dies kann z.B. durch die Zuweisung von Näherungskoordinaten für alle Netzpunkte erfolgen.
2. Anbindung des geodätischen Netzes an den Referenzrahmen. Dies erfolgt dadurch, dass einer ausreichenden Anzahl von Netzpunkten Werte für deren Koordinaten zugewiesen werden, was als Datumsfestlegung oder Datumsverfügung bezeichnet wird.

In einem ebenen maßstabsbestimmten Lagenetz kann diese Datumsfestlegung z.B. durch Zuweisung von Koordinaten für einen Netzpunkt und die Festlegung des Rechts- oder Hochwertes eines weiteren Punktes erfolgen. Da für diese Elemente eine Varianz gleich null angenommen wird (sie gelten als „fehlerfrei"), wird diese Festlegung auch als Auswahl einer Nullvarianz-Rechenbasis[1] bezeichnet. Die ausgleichungstechnische Realisierung erfolgt dann derart, dass diese Koordinaten nicht als Unbekannte eingeführt werden, oder dass über ihren Wert mit Hilfe von Bedingungsgleichungen verfügt wird. Da durch diese Festlegung kein Zwang auf die innere Geometrie der Punktgruppe ausgeübt wird, bezeichnet man diese Vorgehensweise als *freie Netzausgleichung*.

[1] Abweichend zur Bezeichnung des englischen Begriffs „zero-variance computational base" mit dem Begriff „varianzfreie Berechnungsbasis" (Niemeier 2002, S. 233), wird hier der Begriff „Nullvarianz-Rechenbasis" eingeführt, der zutreffender beschreiben soll, dass einige Elemente eine Varianz gleich null aufweisen und nicht, dass es eine Varianz für diese Elemente nicht gibt.

Da aber die Auswahl der Nullvarianz-Rechenbasis durch eine Festlegung der datumsdefinierenden Punkte willkürlich erfolgen kann, stellen der Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}$ und die Kofaktorenmatrix der Unbekannten $\mathbf{Q}_{xx}$ kein objektives Maß für die Beurteilung eines Netzes dar. Um diesem Umstand entgegenzuwirken, hat Meissl (1962) die Forderung aufgestellt, die Lösung derart zu bestimmen, dass die Spur der Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{xx}$ mit

$$\mathrm{Spur}\ \{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min \tag{2.1}$$

zum Minimum wird („Gesamtspurminimierung“) und somit alle Punkte des Netzes gleichartig behandelt werden. Der Formelapparat für eine Netzausgleichung mit dieser Forderung wurde dann von Mittermayer (1972) ausgearbeitet und in den darauf folgenden Jahren durch eine Vielzahl von Publikationen für verschiedene Aufgabenstellungen erweitert (siehe z.B. Illner 1985). Im Gegensatz zu einer Ausgleichung mit festgehaltenen Punkten als Nullvarianz-Rechenbasis ist die Auswahl dieser Basis bei der Ausgleichung mit der Forderung nach Gesamtspurminimierung nicht unmittelbar ersichtlich. Wie diese Nullvarianz-Rechenbasis für ein zweidimensionales maßstabsbestimmtes Netz aussieht, soll im Folgenden gezeigt werden.

Gegeben ist ein zweidimensionales Netz mit p Punkten, deren relative Lage zueinander durch Messung von z.B. Strecken und Winkeln bestimmt wurde. Anstelle einer Ausgleichung mit einer Auswahl der tatsächlichen Messwerte als Unbekannte, sollen Koordinaten eingeführt und eine freie Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung durchgeführt werden, wobei der Referenzrahmen durch die Auswahl von Näherungskoordinaten X_i^0, Y_i^0 für alle Netzpunkte festgelegt wird. In diesem Beispiel wird davon ausgegangen, dass Unbekannte, die nicht von Typ „Koordinate“ sind, bereits vorab eliminiert wurden. Belässt man diese Unbekannten (z.B. Maßstabsfaktoren, Orientierungsunbekannte) im Ausgleichungsansatz, so ist zu beachten, dass sich die „Gesamtspurminimierung“ lediglich auf die Varianzen der Koordinatenunbekannten bezieht. Eine Ausweitung der Bedingungsgleichungen auf Unbekannte, die nicht vom Typ „Koordinate“ sind, ist nach (Niemeier 2002, S. 236) geometrisch nicht interpretierbar. Aus den empirischen Standardabweichungen der Beobachtungen erhält man die Gewichtsmatrix $\mathbf{P}$, die Funktionalmatrix $\mathbf{A}$ ergibt sich aus den Beobachtungsgleichungen des Gauß-Markov-Modells. Da Koordinaten aber im Informationsgehalt der Messungen nicht enthalten sind, erhält man aus

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A} \tag{2.2}$$

eine singuläre Normalgleichungsmatrix, die in dem hier betrachteten Fall einen Rangdefekt von $d = 3$ aufweist. Wie bereits erwähnt, lässt sich dieser Rangdefekt beheben, indem man einen Punkt und die Richtung zu einem weiteren Punkt festhält, wodurch die innere Geometrie mit den eingeführten Koordinaten verknüpft wird. Hier soll aber nun die Datumsfestlegung unter Verwendung der in (Mittermayer 1972) hergeleiteten Bedingungsgleichung

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \tag{2.3}$$

mit

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & \cdots & \cdots & -Y_p^0 & X_p^0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

und dem Vektor der Unbekannten

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \Delta\hat{x}_1 & \Delta\hat{y}_1 & \Delta\hat{x}_2 & \Delta\hat{y}_2 & \cdots & \cdots & \Delta\hat{x}_p & \Delta\hat{y}_p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad , \tag{2.5}$$

der die Zuschläge zu den Näherungskoordinaten enthält, erfolgen. Nach einer Erweiterung des Normalgleichungssystems („Ränderung“) mit (2.4), erhält man aus

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{N} & \mathbf{G} \\ \hline \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}} \\ \hline \mathbf{k} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\,\mathbf{l} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right] \tag{2.6}$$

eine Lösung mit der Eigenschaft Spur $\{\mathbf{Q}_{xx}\} = \min$, wobei mit $\mathbf{l}$ der (verkürzte) Beobachtungsvektor und mit $\mathbf{k}$ der Korrelatenvektor bezeichnet ist. Um diese Datumsfestlegung hinsichtlich der Auswahl einer Nullvarianz-Rechenbasis zu interpretieren, wird nun (2.3) ausmultipliziert und man erhält für die ersten zwei Bedingungen

$$\sum_{i=1}^{p} \Delta\hat{x}_i = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{p} \Delta\hat{y}_i = 0 \quad , \tag{2.7}$$

was gleichbedeutend damit ist, dass der Schwerpunkt der ausgeglichenen Koordinaten

$$\hat{\bar{X}} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \hat{X}_i \ , \quad \hat{\bar{Y}} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} \hat{Y}_i \tag{2.8}$$

gleich dem aus Näherungskoordinaten

$$\bar{X}^0 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i^0 \ , \quad \bar{Y}^0 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_i^0 \tag{2.9}$$

ist, so dass gilt

$$\hat{\bar{X}} = \bar{X}^0 \ , \quad \hat{\bar{Y}} = \bar{Y}^0 \quad . \tag{2.10}$$

Für die dritte Bedingung erhält man

$$\sum_{i=1}^{p} \left(-Y_i^0 \Delta\hat{x}_i + X_i^0 \Delta\hat{y}_i \right) = 0 \tag{2.11}$$

und in ausführlicher Darstellung, mit

$$\Delta\hat{x}_i = \hat{X}_i - X_i^0 \quad \text{und} \quad \Delta\hat{y}_i = \hat{Y}_i - Y_i^0 \quad , \tag{2.12}$$

ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{p} X_i^0 \hat{Y}_i - \sum_{i=1}^{p} \hat{X}_i Y_i^0 = 0 \quad . \tag{2.13}$$

In Verbindung mit (2.7) lässt sich auch diese Bedingung anschaulich interpretieren. Betrachtet man dazu den Rotationswinkel $\hat{\alpha}$, der sich aus einer Helmerttransformation zwischen den Näherungskoordinaten X_i^0, Y_i^0 und den ausgeglichenen Koordinaten $\hat{X}_i, \hat{Y}_i$ ergibt, so erhält man den bekannten Ausdruck

$$\hat{\alpha} = \arctan \frac{\sum_{i=1}^{p} \left(\hat{Y}_i - \hat{\bar{Y}} \right) \left(X_i^0 - \bar{X}^0 \right) - \sum_{i=1}^{p} \left(\hat{X}_i - \hat{\bar{X}} \right) \left(Y_i^0 - \bar{Y}^0 \right)}{\sum_{i=1}^{p} \left(\hat{X}_i - \hat{\bar{X}} \right) \left(X_i^0 - \bar{X}^0 \right) - \sum_{i=1}^{p} \left(\hat{Y}_i - \hat{\bar{Y}} \right) \left(Y_i^0 - \bar{Y}^0 \right)} \quad . \tag{2.14}$$

Multipliziert man den Zähler *z* des Argumentes in (2.14) aus, so folgt

$$z = \sum_{i=1}^{p} X_i^0 \hat{Y}_i - p\bar{X}^0 \hat{\bar{Y}} - p\bar{X}^0 \hat{\bar{Y}} + p\bar{X}^0 \hat{\bar{Y}} - \sum_{i=1}^{p} \hat{X}_i Y_i^0 + p\hat{\bar{X}} \bar{Y}^0 + p\hat{\bar{X}} \bar{Y}^0 - p\hat{\bar{X}} \bar{Y}^0 \tag{2.15}$$

und nach Einsetzen von (2.10) erhält man

$$z = \sum_{i=1}^{p} X_i^0 \hat{Y}_i - \sum_{i=1}^{p} \hat{X}_i Y_i^0 \underbrace{- p\hat{\bar{X}}\hat{\bar{Y}} - p\hat{\bar{X}}\hat{\bar{Y}} + p\hat{\bar{X}}\hat{\bar{Y}} + p\hat{\bar{X}}\hat{\bar{Y}} + p\hat{\bar{X}}\hat{\bar{Y}} - p\hat{\bar{X}}\hat{\bar{Y}}}_{=0} \quad . \tag{2.16}$$

Setzt man nun noch (2.13) ein, so folgt

$$z = 0 \quad . \tag{2.17}$$

Der Nenner *n* des Argumentes (2.14) lässt sich lediglich zu

$$n = \sum_{i=1}^{p} X_i^0 \hat{X}_i - p\bar{X}^0 \hat{\bar{X}} - \sum_{i=1}^{p} Y_i^0 \hat{Y}_i + p\bar{Y}^0 \hat{\bar{Y}} \tag{2.18}$$

umformen und somit nimmt der Quotient in (2.14) den Wert null an. Man erhält schließlich für den Rotationswinkel

$$\hat{\alpha} = 0 \quad . \tag{2.19}$$

Im Folgenden soll nun die Varianz des Schwerpunktes $\hat{\bar{X}}, \hat{\bar{Y}}$ und des Rotationswinkels $\hat{\alpha}$ unter Verwendung der aus der freien Netzausgleichung erhaltenen Kofaktorenmatrix $\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}}$ untersucht werden. Wendet man das Kovarianzfortpflanzungsgesetz

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{yy}} = \mathbf{F}\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}}\mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{2.20}$$

mit der Funktionalmatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -Y_1^0 & X_1^0 & -Y_2^0 & X_2^0 & \cdots & \cdots & -Y_p^0 & X_p^0 \end{bmatrix} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \tag{2.21}$$

an, so ergibt sich (2.20) zu

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{yy}} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}}\mathbf{G} \quad . \tag{2.22}$$

Wie in (Mittermayer 1972) gezeigt wurde, gilt für die Kofaktorenmatrix aus einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}} = \mathbf{0} \quad . \tag{2.23}$$

Damit erhält man aus (2.22)

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{yy}} \equiv \mathbf{0} \quad . \tag{2.24}$$

Das bedeutet, dass sich die Summen

$$\sum_{i=1}^{p} \Delta\hat{x}_i \ , \quad \sum_{i=1}^{p} \Delta\hat{y}_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{p} \left(-Y_i^0 \Delta\hat{x}_i + X_i^0 \Delta\hat{y}_i \right) \tag{2.25}$$

mit einer Varianz von null ergeben. Da sowohl die Schwerpunktkoordinaten $\hat{\bar{X}}, \hat{\bar{Y}}$ als auch der Rotationswinkel $\hat{\alpha}$ Funktionen nur dieser Summen sind, beträgt auch ihre Varianz gleich null. Somit stellt die freie Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung einen Spezialfall der Ausgleichung mit einer Nullvarianz-Rechenbasis dar. Obwohl nicht unmittelbar ersichtlich, wird ebenfalls einer dem Rangdefekt entsprechenden Anzahl von Elementen eine Varianz gleich null zugewiesen. Bei einem ebenen maßstabsbestimmten Lagenetz mit dem Rangdefekt $d = 3$ sind dies:

- Der Schwerpunkt der Punktgruppe, berechnet aus den ausgeglichenen Koordinaten, besitzt eine Varianz gleich null und ist gleich dem Schwerpunkt, berechnet aus den zuvor willkürlich ausgewählten Näherungskoordinaten.
- Die Gesamtrotation der ausgeglichenen Koordinaten der Punktgruppe gegenüber den Näherungskoordinaten beträgt 0 gon und besitzt eine Varianz gleich null.

Bei einem Höhennetz mit dem Rangdefekt $d = 1$ ist dies der Schwerpunkt der ausgeglichenen Höhen, der eine Varianz gleich null aufweist (Neitzel 2003, S. 11).

Charakteristisch für diesen Spezialfall der Ausgleichung mit einer Nullvarianz-Rechenbasis ist, dass bei der Ausgleichung mit der Forderung Spur $\{\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}}\}$ = min alle Punkte gleichberechtigt an der Festlegung der Nullvarianz-Elemente teilnehmen.

3 Die Eigenschaften der Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung

Die Ergebnisse einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung werden nach (Meissl 1962) auch „inneres Koordinatensystem (mit minimaler Spur)“ und ihre Fehlerschätzung „innere Fehlermatrix“ (Meissl 1969) genannt. Bezüglich der Eigenschaften dieser inneren Koordinaten wird z.B. in (Pelzer 1971, S. 25) ausgeführt, dass diese zu den schätzbaren Funktionen gehören.

Grafarend und Schaffrin (1976) haben jedoch gezeigt, dass in einer Ausgleichung exakt r = Rang (**A**) Parameter unverzerrt schätzbar sind, d.h. dass der Vektor der Unbekannten **x** mit einer spaltenregulären Koeffizientenmatrix **A** an den Beobachtungsvektor **l** geknüpft sein muss. Das ist aber nur dann der Fall, wenn man in einem freien Netz Unbekannte einführt, die im Informationsgehalt der Messungen tatsächlich enthalten sind (z.B. Strecken und Winkel in einem Lagenetz). Führt man hingegen Koordinaten als Unbekannte ein, so erhält man eine Koeffizientenmatrix, die den Rangdefekt

$$d = m - r \tag{3.1}$$

mit

m : Anzahl der Unbekannten
r : Rang ($\mathbf{A}$)

aufweist, und es ist sofort einsichtig, dass es sich bei den Koordinatenunbekannten nicht um schätzbare Größen für das ursprüngliche Problem handeln kann. Des Weiteren haben Grafarend und Schaffrin (1976) das wichtige Äquivalenztheorem zwischen schätzbaren und invarianten Größen eines geodätischen Netzes formuliert, auf das in Abschnitt 3.4 eingegangen wird. Aufgrund dieses Theorems ist ebenfalls sofort einsichtig, dass es sich bei Koordinaten nicht um schätzbare Funktionen handeln kann, da sie nicht zu den invarianten Größen eines geodätischen Netzes gehören.

In der Literatur sind viele Vorschläge zu finden, wie man das singuläre Ausgleichungsproblem mit Koordinaten lösen kann und obwohl die Begriffe unterschiedlich sind (z.B. Lösung durch Einführung von Bedingungsgleichungen, Lösung mit Pseudoinverse) basieren alle Verfahren darauf, dass eine Datumsfestlegung bezüglich der Näherungskoordinaten erfolgt. Anstelle einer Schätzung von r = Rang ($\mathbf{A}$) Parametern, die sich aus den Messungen eindeutig ergibt, wird also ein *anderes* Problem gelöst, bei dem durch zusätzliche Informationen für die Datumsfestlegung $r + d$ Parameter geschätzt werden. Doch statt ausdrücklich zu erwähnen, dass die Schätzung der Koordinaten in einem anderen, um die Datumsfestlegung erweiterten Modell stattfindet, werden den Ergebnissen einer derartigen Ausgleichung in der Literatur die unterschiedlichsten Eigenschaften zugesprochen. Pelzer (1971, S. 25) gibt an, dass die inneren Koordinaten zu den „invarianten Elementen" eines Punkthaufens gehören, wobei der Begriff „invariant" im Sinne von „bestimmbar" verwendet wurde, siehe (Pelzer 1974). Auch in (Niemeier 1979, S. 13 ff.) werden die inneren Koordinaten eingehend untersucht und als „Sonderform schätzbarer Funktionen" mit den Eigenschaften einer „besten linear erwartungstreuen Schätzung" eingestuft. Zudem wird aufgezeigt, dass sich die inneren Koordinaten durch eine spezielle Wahl der Bedingungsgleichungen in der Form (2.3) auch aus dem „Konzept der bedingten Erwartungstreue" mit den Eigenschaften einer „besten linearen bedingt erwartungstreuen Schätzung" ergeben. In (Illner 1985, S. 5) hingegen, werden die inneren Koordinaten als „nicht schätzbare" Größen klassifiziert.

Im Folgenden werden diese Ansätze kurz dargestellt und kommentiert. Danach soll die Frage beantwortet werden, unter welchen Umständen die inneren Koordinaten zu den schätzbaren Größen eines geodätischen Netzes gehören können.

3.1 Innere Koordinaten als Sonderfall schätzbarer Funktionen?

Schätzbare Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie sich unabhängig von einer beliebigen Lösung $\mathbf{x}_s$ (Sonderlösung) immer eindeutig ergeben, so ergeben sich z.B. Strecken und Winkel in einem frei ausgeglichenen Lagenetz immer eindeutig und unabhängig davon, welche Nullvarianz-Rechenbasis für die Erzeugung der Koordinaten $\mathbf{x}_s$ festgelegt wurde. In (Schaffrin 1975, S. 2) werden schätzbare Funktionen im Gauß-Markov-Modell wie folgt definiert.

Definition 3.1:

Sei $\mathbf{F}$ eine (f, m)-Matrix mit $1 \le f \le m$, dann ist $\mathbf{Fx}$ (erwartungstreu) schätzbar, wenn eine (n, f)-Matrix (mit n = Anzahl der Beobachtungen) $\mathbf{L}$ existiert für die

$$\mathrm{E}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}) = \mathbf{Fx} \tag{3.2}$$

gilt. $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{l}$ heißt dann linear unverzerrte Schätzung (Linear Unbiased Estimator, LUE) von $\mathbf{Fx}$.

Die Eigenschaft, dass $\mathbf{Fx}$ schätzbar ist, ist äquivalent dazu, dass eine (n, f)-Matrix $\mathbf{L}$ existiert, für die

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \tag{3.3}$$

gilt und $\mathbf{F}$ somit als Linearkombination der Spalten von $\mathbf{A}$ darstellbar ist.

Daraus folgt, dass sich alle Funktionen invariant gegenüber einer beliebigen Lösung $\mathbf{x}_s$ ergeben, für die (3.3) erfüllt ist (Niemeier 1979, S. 12).

Für eine beste lineare Schätzung gibt (Schaffrin 1975, S. 4) folgende Definition an.

Definition 3.2:

$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$ heißt beste lineare Schätzung (<u>B</u>est <u>L</u>inear <u>E</u>stimator, BLE) von **Fx** wenn für alle (n, f)-Matrizen $\overline{\mathbf{L}}$ gilt:

$$\text{Spur E}\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}-\mathbf{Fx}\right)\left(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}-\mathbf{Fx}\right)^{\mathrm{T}} \leq \text{Spur E}\left(\overline{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}-\mathbf{Fx}\right)\left(\overline{\mathbf{L}}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}-\mathbf{Fx}\right)^{\mathrm{T}} \tag{3.4}$$

Somit ist eine beste lineare Schätzung definiert als Schätzung mit minimaler Spur der Varianzmatrix. Weiterhin gibt Schaffrin (1975, S. 5) an, dass ein Minimum vorliegt, falls die Normalgleichungen erfüllt sind.

Aufgrund dieser Eigenschaften lässt sich eine beste linear unverzerrte Schätzung wie folgt definieren (Schaffrin 1975, S. 5 ff.).

Definition 3.3

$\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$ ist die beste lineare unverzerrte Schätzung (<u>B</u>est <u>L</u>inear <u>U</u>nbiased <u>E</u>stimator, BLUE) von **Fx** wenn gilt: $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$ ist zunächst eine linear unverzerrte Schätzung (LUE) und dann beste lineare Schätzung (BLE) von **Fx**.

Da sich schätzbare Funktionen neben ihrer Eindeutigkeit auch durch ihre minimale Varianz auszeichnen (Niemeier 1979, S. 12 ff. mit Verweis auf das Gauß-Markov-Theorem), ist $\mathbf{Fx}_{\mathrm{s}}$ somit die beste lineare unverzerrte Schätzung mit den Eigenschaften

- Eindeutigkeit,
- Erwartungstreue (Unverzerrtheit),
- minimale Varianz

einer schätzbaren Funktion **Fx**, wobei $\mathbf{x}_{\mathrm{s}}$ eine beliebige Lösung einer Ausgleichung nach kleinsten Quadraten $\mathbf{Nx} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{l}$ ist.[2]

Dass die inneren Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung alle Eigenschaften schätzbarer Funktionen aufweisen, wird erstmals in (Pelzer 1971, S. 25) und danach unter anderem in (Koch 1978, Niemeier 1979, S. 13) erwähnt, obwohl die Matrix **A** bei einer freien Netzausgleichung den Rangdefekt $d = m - r$ aufweist. Um den Rangdefekt zu beheben und eine freie Netzausgleichung durchführen zu können, wird eine (m, d)-Matrix **G** eingeführt, für die gilt (Meissl 1969):

$$\mathbf{AG} = \mathbf{0} \quad . \tag{3.5}$$

In (Mittermayer 1972) wurde gezeigt, dass in der Matrix **G** die Eigenvektoren bezüglich des d-fachen Eigenwertes $\lambda = 0$ der Normalgleichungsmatrix zusammengefasst sind. Für ein maßstabsbestimmtes Lagenetz erhält man die Matrix **G** wie in (2.4) dargestellt. Nach der Erweiterung der Normalgleichungsmatrix erhält man dann aus (2.6) eine Lösung mit der Eigenschaft Spur $\{\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}}\}$ = min.

Hat man das Ausgleichungsproblem hingegen derart gelöst, dass man einen Punkt und eine Richtung zu einem weiteren Punkt festgehalten hat, so erhält man für die Koordinatenzuschläge eine beliebige Lösung $\mathbf{x}_{\mathrm{s}}$ (in Abhängigkeit der gewählten Nullvarianz-Rechenbasis). Aus dieser Lösung, die in (Pelzer 1971, S. 24 ff.) als „Sonderlösung" bezeichnet wird, lassen sich unter Verwendung der symmetrischen Transformationsmatrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \tag{3.6}$$

die Koordinatenzuschläge und die Kofaktorenmatrix

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Fx}_{\mathrm{s}} \tag{3.7}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{xx}} = \mathbf{FQ}_{\mathrm{ss}}\mathbf{F} \tag{3.8}$$

der Lösung einer freien Ausgleichung mit Gesamtspurminimierung berechnen. Die Matrix **G** lautet für ein maßstabsbestimmtes Lagenetz mit p Punkten wie in (2.4) dargestellt. Diese Transformation entspricht einer differentiellen 3-Parameter-Transformation (zwei Translationen, eine Rotation) der Sonderlösung $\mathbf{x}_{\mathrm{s}}$ auf die Näherungskoordinaten $\mathbf{x}^0$ der homologen Punkte. Dass die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorliegen schätzbarer Funktionen

$$\mathbf{FG} = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

erfüllt ist, wird ebenfalls in (Pelzer 1971, S. 25) mit

[2] In dieser Darstellung wird davon ausgegangen, dass die Gewichte bereits durch eine Homogenisierung der Beobachtungen berücksichtigt wurden, so dass **P** = **E** ist.

$$\mathbf{FG} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{G}\left(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\right)^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{G} = \mathbf{G} - \mathbf{G} = \mathbf{0} \tag{3.10}$$

angegeben. Aufgrund dieser Darstellung werden die inneren Koordinaten zu schätzbaren Funktionen erklärt. Während dort die Voraussetzungen für die Erfüllung der Gleichung nicht explizit angegeben sind, greift Niemeier (1979, S. 14) den Gedanken erneut auf und stellt dar, dass für die Eigenvektormatrix **G** folgende Eigenschaften aus der linearen Algebra gelten:

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G} = \mathbf{E}\,, \tag{3.11}$$

$$\left(\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right)^2 = \mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}} \text{ (Idempotenz)}, \tag{3.12}$$

$$\left(\mathbf{E} - \mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\right) \text{ ist idempotent und orthogonal zu } \mathbf{G}\ . \tag{3.13}$$

Damit wird die Auflösung der Gleichung (3.10) anschaulich. Zum besseren Verständnis ist jedoch anzumerken, dass die Eigenschaften (3.11), (3.12) und (3.13) nur erfüllt sind, falls die darin enthaltenen Eigenvektoren eine *orthonormale* Basis bilden. Wendet man auf die Basis, gebildet durch die Eigenvektoren in (2.4), das „Schmidtsche Orthonormierungsverfahren“ an, so erhält man

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{p}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} & \cdots & 0 & \frac{1}{\sqrt{p}} \\ -c\left(Y_1^0 - \bar{Y}^0\right) & c\left(X_1^0 - \bar{X}^0\right) & \cdots & -c\left(Y_p^0 - \bar{Y}^0\right) & c\left(X_p^0 - \bar{X}^0\right) \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

mit

$$\bar{X}^0 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} X_i^0 \quad, \ \bar{Y}^0 = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} Y_i^0 \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\left(X_i^0 - \bar{X}^0\right)^2 + \sum_{i=1}^{p}\left(Y_i^0 - \bar{Y}^0\right)^2}}\ . \tag{3.15}$$

Für diese Darstellung sind die Bedingungen (3.11), (3.12) und (3.13) erfüllt. Es ist zu erkennen, dass die Orthonormierung einer Zentrierung der Koordinaten und anschließender Normierung der Eigenvektoren entspricht. Ein Hinweis auf Zentrierung der Koordinaten und anschließender Normierung der Spaltenvektoren von **G** ist auch in (Welsch et al. 2000, S. 145 ff.) zu finden. In (Niemeier 2002, S. 218 ff.) wird ebenfalls der Übergang zu einer orthonormalen Matrix **G** beschrieben, wobei dieses Ziel mit den dort angegebenen Formeln nur dann erreicht wird, wenn die Koordinaten bereits zentriert sind.

Geometrische Interpretation: Der durch die Eigenvektoren in (3.14) aufgespannte Spaltenraum der Matrix **G** ist orthogonal zum Spaltenraum der zugehörigen Normalgleichungsmatrix **N**. Die Basisvektoren haben die Länge eins und stehen senkrecht zueinander. Die Eigenvektoren der Matrix **G** in (2.4) stehen nicht alle senkrecht zueinander und haben nicht die Länge eins, spannen aber den selben Spaltenraum auf; sie lassen sich aus Linearkombinationen der Eigenvektoren in Matrix **G** in (3.14) darstellen.

Die Gleichung (3.10) wird somit sowohl von der Matrix **G** in der Darstellung (2.4) als auch in der Darstellung (3.14) erfüllt. Für die praktische Anwendung bietet sich die Matrix **G** in der Darstellung (3.14) an, da somit große Zahlen vermieden werden, was sich auf die numerische Stabilität der weiteren Berechnungen günstig auswirken kann.

Da die Bedingung (3.10) erfüllt ist, gibt Pelzer (1971, S. 25) weiterhin an, dass die innere Fehlermatrix nicht von der Wahl der Bedingungsgleichungen, die zur Erzeugung der Sonderlösung $\mathbf{x}_{\mathrm{s}}$ verwendet wurden, abhängt und somit die inneren Koordinaten zu den schätzbaren Elementen eines Punkthaufens gehören, wobei die Begriffe „innere Fehlermatrix“ und „innere Koordinaten“ für die Ergebnisse einer Ausgleichung mit Gesamtspurminimierung verwendet werden. Diese Eigenschaften sind unmittelbar einsichtig, denn mit (3.7) und (3.8) erfolgt eine differentielle 3-Parameter-Transformation der Sonderlösung $\mathbf{x}_{\mathrm{s}}$ auf die Näherungskoordinaten $\mathbf{x}^0$ der homologen Punkte, so dass sich, unabhängig vom Datum der Ausgangslösung, für die Lösung mit Gesamtspurminimierung immer die gleichen Zuschläge zu den Näherungskoordinaten ergeben.

Was aber tatsächlich geschieht, wird in Gleichung (3.9) deutlich. Setzt man für die Transformationsmatrix **F** den Ausdruck (3.6) ein, so bedeutet dies nichts anderes, als dass eine *Festlegung des Datums* getroffen wird. Somit beziehen sich alle Aussagen bezüglich schätzbarer Größen nicht auf das ursprüngliche Ausgleichungsproblem mit r = Rang (**A**) zu schätzenden Parametern, sondern auf ein erweitertes Modell, in dem durch Datumsfestlegung $r + d$ Parameter geschätzt werden. Da für eine derartige Modellerweiterung jedoch verschiedenste Möglichkeiten bestehen - so erfüllt z.B. auch

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_2^0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} , \tag{3.16}$$

was einer Datumsfestlegung in einem maßstabsbestimmten Lagenetz durch Festhalten eines Punktes und der Richtung zu einem weiteren Punkt entspricht, die Bedingung (3.10) - kann der Einstufung der inneren Koordinaten als „schätzbar in einem erweiterten Modell“ oder als „Sonderfall schätzbarer Funktionen“ keine herausragende Bedeutung zugesprochen werden. Sogar wenn man einer Modellerweiterung mit (2.4) eine besondere Stellung zubilligen möchte (da sie zu einer Lösung mit minimaler Spur der Kofaktorenmatrix und kürzestem Lösungsvektor führt), so ist zu bedenken, dass jede Datumsfestlegung von willkürlich ausgewählten Näherungskoordinaten abhängt. Wählt man andere Näherungskoordinaten, so erhält man als Ergebnis auch andere (innere) Koordinaten und somit ist an dieser Stelle eine Eigenschaft schätzbarer Funktionen, nämlich deren Eindeutigkeit, nicht gegeben.

3.2 Innere Koordinaten als bedingt schätzbare Größen?

In (Pelzer 1971, 1974), (Koch 1978) und (Niemeier 1979) werden den inneren Koordinaten (aus einer Ausgleichung mit Gesamtspurminimierung) die Eigenschaften einer besten, linear unverzerrten Schätzung (BLUE) zugesprochen. Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, ist die Erzeugung dieser Koordinaten aber nur möglich, wenn man das ursprüngliche Ausgleichungsproblem um eine Datumsfestlegung erweitert. Diese Festlegung lässt sich auch als Einführung von Bedingungsgleichungen interpretieren, mit denen ein (durch Einführung von Koordinatenunbekannten) singuläres Ausgleichungsproblem in ein reguläres überführt wird. In (Niemeier 1979, S. 15 ff.) wird die Lösung eines Gauß-Markov-Modells mit einer Koeffizientenmatrix, die nicht den vollen Spaltenrang aufweist, durch Hinzunahme von Bedingungsgleichungen oder Pseudobeobachtungen aufgezeigt. Für eine spezielle Modellerweiterung mit Bedingungsgleichungen in der Form (2.3) wird gezeigt, dass man wieder schätzbare innere Koordinaten mit den Eigenschaften des kürzesten Lösungsvektors und der minimalen Spur der Kofaktorenmatrix erhält, wenn **G** die Eigenvektoren zu den Eigenwerten null der Normalgleichungsmatrix **N** enthält. Diese Optimaleigenschaften beziehen sich somit nicht auf das ursprüngliche Ausgleichungsproblem mit r = Rang (**A**) zu schätzenden Parametern, sondern auf ein erweitertes Modell, wobei die Erweiterung in diesem Fall wieder in einer Datumsfestlegung besteht. Die Lösung wird dann in (Niemeier 1979, S. 18) auch als „beste lineare bedingt erwartungstreue Schätzung“ (Best Linear Conditionally Unbiased Estimation, BLICUE) in Bezug auf die gewählten Bedingungen bezeichnet.

Die oben beschriebene Auswahl von **G** ist aber nur eine von vielen denkbaren Möglichkeiten, mit Hilfe von Bedingungsgleichungen über das Datum zu verfügen. Wählt man **G** z.B. in der Form (3.16), so erhält man für die Koordinatenzuschläge eine andere Lösung, die aber ebenfalls die Forderung (2.3) erfüllt. Da die Datumsfestlegung zudem von den eingeführten Näherungskoordinaten abhängt, ist auch an dieser Stelle eine Eigenschaft schätzbarer Funktionen, nämlich deren Eindeutigkeit, nicht gegeben.

3.3 Innere Koordinaten als schätzbare Größen aus der Lösung mit Pseudoinverse?

Der Lösungsweg unter Verwendung der Pseudoinverse $\mathbf{N}^+$ wird in (Niemeier 1979, S. 20 ff.) als weitere Möglichkeit zur Berechnung eindeutiger Lösungen in allgemeinen linearen Modellen dargestellt. In (Koch 1978) findet man ebenfalls Untersuchungen zur generalisierten Inverse und Pseudoinverse aus Bedingungen. Für die Lösung[3]

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{N}^+ \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{l} \text{ und } \mathbf{Q}_{\mathrm{xx}} = \sigma^2 \mathbf{N}^+ \tag{3.17}$$

wird angegeben, dass es sich um eine „beste lineare erwartungstreue Schätzung“ handelt. Danach wird ausgeführt, dass die Transformation von nicht schätzbaren Parametern in schätzbare Funktionen mit Hilfe der Pseudoinverse einer Einführung von Bedingungen entspricht. Als Beispiel wird angegeben, dass in einem freien Netz der aus Näherungskoordinaten berechnete Schwerpunkt (2.9) mit dem der ausgeglichenen Koordinaten

[3] Siehe Fußnote 2.

identisch ist. Die Ausführungen in (Koch 1978) zeigen somit, dass es sich bei dem Lösungsweg mit der Pseudoinverse lediglich um eine weitere rechentechnische Realisierung einer Datumsfestlegung handelt. Die Aussage, dass es sich bei (3.17) um die „beste lineare erwartungstreue Schätzung“ handelt, gilt also wieder nicht für das ursprüngliche Ausgleichungsproblem mit r = Rang (**A**) zu schätzenden Parametern, sondern für ein Modell, das durch eine Datumsfestlegung *erweitert* wurde. Durch die Lösung mit der Pseudoinverse wird aus der Vielzahl der möglichen Modellerweiterungen lediglich eine spezielle ausgewählt, die zu einer Lösung mit minimaler Spur der Kofaktorenmatrix und kürzestem Lösungsvektor führt. Doch auch diese Lösung hängt wieder von den willkürlich auswählbaren Näherungskoordinaten ab, so dass eine Eigenschaft schätzbarer Größen, nämlich deren Eindeutigkeit nicht gegeben ist.

3.4 Das Äquivalenztheorem von schätzbaren und invarianten Größen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde aufgezeigt, dass sich Koordinaten nur in einem um die Datumsfestlegung erweiterten Modell schätzen lassen. Doch auch in diesem erweiterten Modell ergeben sich die inneren Koordinaten nicht eindeutig, da sie von beliebig auszuwählenden Näherungskoordinaten abhängen. Grafarend und Schaffrin (1976) haben die Äquivalenz von schätzbaren und invarianten Größen untersucht und das folgende Äquivalenztheorem formuliert.

> Sei $\mathbf{l} = \mathbf{Ax}$ ein spezielles lineares Gauß-Markov-Modell mit den generellen Eigenschaften Dimension $(\mathbf{A}) = n \times m$, Rang $(\mathbf{A}) \leq m \leq n$. Alle Vektoren $\mathbf{Fx}$ von funktional (speziell linear) unabhängigen Größen sind linear unverzerrt schätzbar, wenn und nur wenn sie invariant sind bezüglich jeder Transformation, die den Beobachtungsvektor $\mathbf{l}$ invariant belässt.

Somit müssen sich schätzbare Größen auch unabhängig von der Datumsfestlegung immer gleich ergeben. Es ist unmittelbar einsichtig, dass Koordinaten (oder Koordinatenzuschläge) *keine* schätzbaren Größen sein können, da sie nicht zu den invarianten Größen eines geodätischen Netzes gehören. Wählt man z.B. bei der Ausgleichung eines freien Lagenetzes anstelle der Näherungskoordinaten $\mathbf{x}^0$ einen um den Winkel α rotierten Koordinatensatz $\mathbf{x}^0_\alpha$ (eine Transformation, die den Beobachtungsvektor $\mathbf{l}$ invariant belässt), so erhält man mit $\hat{\mathbf{x}} \neq \hat{\mathbf{x}}_\alpha$ ein Ergebnis, das nicht die Forderung der Invarianz erfüllt.

4 Klassifizierung der inneren Koordinaten in Bezug zur Aufgabenstellung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde aufgezeigt, dass die Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung nicht zu den schätzbaren Größen gehören können, in Bezug auf die ursprüngliche Aufgabenstellung, nämlich der Bestimmung der ausgeglichenen Geometrie eines Punkthaufens. Diese Feststellung ist auch an einigen Stellen in der Literatur anzutreffen, so z.B. in (Illner 1985, S. 5): „Nicht schätzbare Größen sind dagegen die ausgeglichenen Koordinaten und deren Kofaktoren, die von der Lösungsart und damit von der Wahl der Restriktionen bzw. der Festlegung des freien Datums abhängen.“ Wie ist nun diese Aussage in Verbindung zu bringen, mit den formal richtigen Ausführungen in (Pelzer 1971, S. 25), (Koch 1978) und (Niemeier 1979, S. 13 ff.), in denen den Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung die Eigenschaft der „Schätzbarkeit“ zugesprochen wird? Unerlässlich für die Beantwortung dieser Frage ist eine klare Definition der Aufgabenstellung.

Besteht die Aufgabe darin, die *ausgeglichene Geometrie* eines Punkthaufens zu bestimmen, so kann dies in einem Modell geschehen, in dem r = Rang (**A**) Unbekannte (z.B. Strecken in einem Lagenetz) eingeführt werden, die die Geometrie gerade eindeutig beschreiben. In Bezug auf diese Aufgabenstellung stellen Koordinaten natürlich keine schätzbaren Größen dar; sie sind im Informationsgehalt der Messungen nicht enthalten.

Eine völlig andere Aufgabenstellung liegt in dem Fall vor, wenn *Koordinaten* bestimmt werden sollen. Dazu muss die ursprüngliche Aufgabenstellung dahingehend *erweitert* werden, dass eine Verfügung über das geodätische Datum zu treffen ist. Um diesen Teil der Aufgabenstellung zu erfüllen, wird ein Referenzrahmen (Koordinatensystem) durch die Auswahl von Näherungskoordinaten für die Netzpunkte eingeführt und die datumstragenden Punkte werden festgelegt. Damit die inneren Koordinaten überhaupt zu den schätzbaren Größen gehören können, müssen diese Festlegungen *per Definition* erfolgen; sie stehen somit in den folgenden Schritten nicht mehr zur Disposition. Die in den Abschnitten 3.1 bis 3.4 beschriebene Möglichkeit der Auswahl anderer Näherungskoordinaten (z.B. durch Auswahl eines um den Winkel α rotierten Koordinatensystems) und eine Veränderung der datumstragenden Punkte scheidet damit aus. Im Anschluss daran ist ein Modell aufzustellen, das dieser Aufgabenstellung gerecht wird, was derart erfolgen kann, dass das ursprüngliche Modell um eine Datumsdefinition auf Grundlage der ausgewählten Näherungskoordinaten erweitert wird. An dieser Stelle stehen nun verschiedene Möglichkeiten gleichberechtigt nebeneinander (z.B. Einführung von Bedingungsgleichungen, Verwendung der Pseudoinverse). Bei dieser Begriffsbildung ist aber zu beachten, dass es sich dabei um Möglichkeiten der Modellbildung für ein und dieselbe Aufgabenstellung handelt, nämlich der Bestimmung von Koordinaten unter Berücksichtigung der getroffenen Datumsdefinition. In Bezug zu *dieser* Aufgabenstellung stellen die Koordinaten einer freien Netzausgleichung, rein formal betrachtet, schätzbare Größen dar.

Somit konnte die Frage, ob Koordinaten zu den schätzbaren Größen eines geodätischen Netzes gehören, geklärt werden, was dazu beiträgt, die teilweise unterschiedlichen Auffassungen über die Eigenschaften der Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung im richtigen Zusammenhang, nämlich unter Berücksichtigung der tatsächlich zugrunde liegenden Aufgabenstellung, zu sehen.

5 Schlussbetrachtung

Es konnte gezeigt werden, dass sich Festlegung der datumsdefinierenden Punkte bei einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung als Spezialfall der Auswahl einer Nullvarianz-Rechenbasis interpretieren lässt. Anhand des Beispiels eines zweidimensionalen maßstabsbestimmten Lagenetzes wurde gezeigt, dass einer dem Rangdefekt entsprechenden Anzahl von Elementen eine Varianz gleich null zugewiesen wird. Dies sind die Schwerpunktkoordinaten und der Rotationswinkel zwischen den Näherungskoordinaten und den ausgeglichenen Koordinaten.

Die zum Teil widersprüchlichen Angaben in der Literatur, ob die Koordinaten aus einer freien Netzausgleichung mit Gesamtspurminimierung zu den schätzbaren Größen eines geodätischen Netzes gehören, wurden kurz dargelegt. Danach wurde gezeigt, dass sich die zum Teil verwirrende Begriffsbildung erhellen lässt, wenn man die Koordinaten in Bezug zu der tatsächlichen Aufgabenstellung sieht. Besteht die Aufgabe darin, die ausgeglichene Geometrie eines Punkthaufens zu bestimmen, stellen sie keine schätzbaren Größen dar. Wenn die Aufgabenstellung dahingehend erweitert wird, dass man Koordinaten berechnen möchte und per Definition einen Referenzrahmen und eine Datumsfestlegung auswählt, dann können sie rein formal als schätzbare Größen angesehen werden.

Literaturverzeichnis

Grafarend, E., Schaffrin, B.: Equivalence of Estimable Quantities and Invariants in Geodetic Networks. Zeitschrift für Vermessungswesen 101, Nr. 11, S. 485-491, 1976.

Illner, I.: Datumsfestlegung in freien Netzen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 309, München, 1985.

Koch, K.-R.: Hypothesentests bei singulären Ausgleichungsproblemen. Zeitschrift für Vermessungswesen 103, Nr. 1, S. 1-10, 1978.

Meissl, P.: Die innere Genauigkeit eines Punkthaufens. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 50, Nr. 5, S. 159-165, Nr. 6, S. 186-194, 1962.

Meissl, P.: Zusammenfassung und Ausbau der inneren Fehlertheorie eines Punkthaufens. In: Rinner, K., Killian, K., Meissl, P., Beiträge zur Theorie der geodätischen Netze im Raum, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, Nr. 61, München, 1969.

Mittermayer, E.: Zur Ausgleichung freier Netze. Zeitschrift für Vermessungswesen 97, Nr. 11, S. 481-489, 1972.

Neitzel, F.: Identifizierung konsistenter Datengruppen am Beispiel der Kongruenzuntersuchung geodätischer Netze. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 565, München, 2003

Niemeier, W.: Zur Kongruenz mehrfach beobachteter geodätischer Netze. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 88, Hannover, 1979.

Niemeier, W.: Ausgleichungsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.

Pelzer, H.: Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 164, München, 1971.

Pelzer, H.: Zur Behandlung singulärer Ausgleichungsaufgaben I und II. Zeitschrift für Vermessungswesen 99, Nr. 5, S. 181-194 und Nr. 11, S. 479-488, 1974.

Schaffrin, B.: Zur Verzerrtheit von Ausgleichungsergebnissen. Mitteilungen aus dem Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn, Nr. 39, 1975.

Welsch, W., Heunecke, O., Kuhlmann, H.: Auswertung geodätischer Überwachungsmessungen. In: Möser, M., Müller, G., Schlemmer, H., Werner, H. (Hrsg.), Handbuch Ingenieurgeodäsie, Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg, 2000.

Anschrift des Autors

Dr.-Ing. Frank Neitzel
Institut für Geodäsie und
Geoinformationstechnik
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 135
D-10623 Berlin
Tel.: ++ 49-30/314-24332
Fax: ++ 49-30/314-21973
E-Mail: frank@mca.bv.tu-berlin.de